

### Traccia n.3

Il candidato svolga almeno quattro ed al più sei dei seguenti quesiti raggruppati per ambiti disciplinari. Tre dei quesiti svolti devono essere scelti in gruppi distinti. La risposta ad ogni quesito deve essere sviluppata in un solo foglio formato A4 (fronte-retro).

#### A) (Algebra)

##### • Quesito A.1

Siano  $P(x)$  e  $Q(x)$  due polinomi a coefficienti reali non nulli,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $D(x) = \text{MCD}(P(x), Q(x))$ . Allora,

- i) si dimostri che se  $a$  radice di  $D(x)$  allora  $a$  è radice di  $P(x)$  e di  $Q(x)$ ;
- ii) viceversa si dimostri che se  $a$  è radice di  $P(x)$  e di  $Q(x)$  allora è radice di  $D(x)$ ;
- iii) se  $a$  è radice di  $P(x)$ ,  $a^2$  è radice necessariamente di  $[P(x)]^2$ ?

##### • Quesito A.2

Si verifichi che per ogni  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $5^{2n} - 1$  è un multiplo di 24.

#### B) (Analisi Matematica)

##### • Quesito B.1

Si determinino i punti del grafico della funzione  $f(x) := x^3 - 3x + 5$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) nei quali la tangente

- i) è parallela alla retta  $y = -2x$ ;
- ii) è perpendicolare alla retta  $x + 9y = 0$ ;
- iii) forma un angolo di  $\frac{\pi}{4}$  con l'asse  $x$ ;
- iv) passa per l'origine.

##### • Quesito B.2

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua tale che  $f(x) = \int_a^x f(t)dt$  per ogni  $x \in [a, b]$ . Si provi allora che  $f$  è identicamente nulla su  $[a, b]$ .

**C) (Geometria)**

• **Quesito C.1**

Fissato nel piano un sistema di riferimento metrico  $Oxy$ , si considerino i punti  $A(1, -1)$  e  $B(2, 0)$ . Allora,

- i) si scriva l'equazione del luogo dei punti del piano per i quali la somma delle distanze da  $A$  e da  $B$  vale 2;
- ii) osservato che si tratta di una conica se ne determini il centro, gli assi, gli eventuali asintoti e l'eccentricità.

• **Quesito C.2**

Si consideri nel piano il rombo  $ABCD$  di lato  $l$  e si prolunghi il lato  $AB$  di un segmento  $BE$ , anch'esso di lunghezza  $l$ . Allora,

- i) si provi che il triangolo  $\widehat{ACE}$  è inscritto in una semicirconferenza;
- ii) si verifichi che il segmento  $CE$  è parallelo alla diagonale  $DB$  del rombo;
- iii) nell'ipotesi che l'angolo  $\widehat{ABC}$  abbia ampiezza  $\frac{3}{2}\pi$ , si calcoli l'area del rombo.

**D) (Probabilità)**

• **Quesito D.1**

Sia  $X$  una variabile aleatoria continua avente come densità di probabilità la funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita ponendo

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

ove  $\lambda > 0$ . Si determini la densità di probabilità ed il valor medio di  $X^2$ .

• **Quesito D.2**

In un'urna vi sono una pallina bianca ed una rossa. Si estragga per sei volte consecutive una pallina rimettendola ogni volta nell'urna. Si calcoli la probabilità che il numero delle volte in cui appare la pallina bianca sia superiore a quello della rossa.